UNIDAD VII

Predicción En Modelos No Lineales

UNIDAD VII

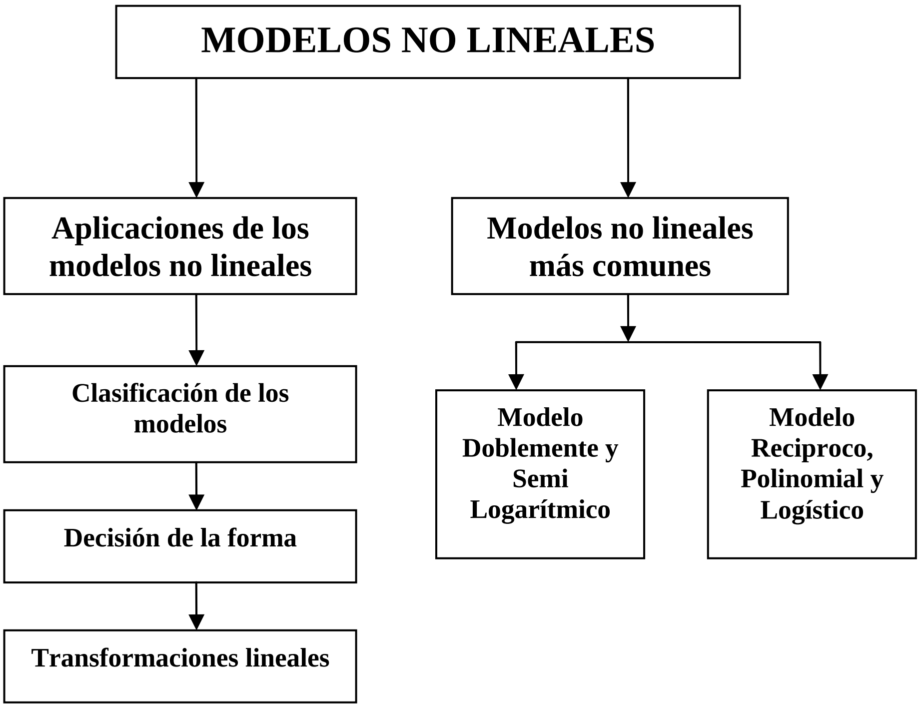
"La Ciencia es necesaria cuando se planifica el futuro. Si el futuro depende del azar, la ciencia no tiene sentido"

Victor Garcia Gonzales, 1991

- **¿Cuáles son las aplicaciones de un modelo no lineal?**
- **¿Qué clases de modelos no lineales hay?**
- **¿Cuales son los modelos no lineales más comunes?**
- **¿Qué pasos se siguen para estimar un modelo no lineal?**
- **¿Cómo se interpretan los parámetros?**

PREDICCION EN MODELOS NO LINEALES

ESQUEMA CONCEPTUAL



COMPETENCIAS A LOGRAR

CONCEPTUAL	PROCEDIMENTAL	ACTITUDINAL
Explica los diferentes modelos no lineales que se presentan en casos reales como en la económica.	Realiza el análisis previo para evaluar el tipo de regresión y la respectiva transformación.	Analiza las relaciones entre variables para encontrar el mejor modelo de estimación.

CONCEPTOS –CLAVE

Gráficos de funciones no lineales; potencia, exponencial, reciproco, Polinomial. Curva de Phillips, Costo marginal.

LECCIÓN 1

APLICACIONES MODELO NO LINEAL

1. MODELO NO LINEAL

Son modelos cuya ***estructura matemática*** no es la del Modelo Lineal General.

La teoría económica propone modelos de relación entre variables económicas, pero generalmente no determina la forma funcional de dichas relaciones, lo que sugiere que estas puedan ser, en ocasiones, no lineales. En tales casos, el modelo es del tipo:

$$Y_t = f(X_t, \beta)+\mu_t, \qquad t= 1,2,..........T$$

Donde $f(X_t,\beta)$ es una función no lineal de las componentes de los vectores X_t y β.

Vector de observaciones de la variable Xt:

$$X_t = \begin{bmatrix} X_{t1} \\ X_{t2} \\ \vdots \\ X_{tn} \end{bmatrix} \quad t = 1,2,...,T$$

Vector de coeficientes a ser estimados:

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} \quad k : \text{número de coeficientes}$$

Una especificación no lineal de un modelo estadístico, puede estar indicando la incertidumbre del investigador acerca de la verdadera relación entre las variables del modelo.

Por ejemplo supongamos que para relacionar los gastos en bienes del consumo C_t, con la renta disponible Y_t, se especifica el modelo.

$$C_t =\beta_1+\beta_2 Y_t^{\beta_3}+\mu_t$$

En dicho modelo, la estimación del parámetro β_2 permitiría contrastar la hipótesis de dependencia lineal o propensión marginal al consumo constante (β_3=1), frente a otras alternativas, como la de una menor sensibilidad del gasto en consumo a variaciones en la renta disponible (β_3<1). Este modelo seria, claramente, menos restrictivo que una especificación lineal; también puede interpretarse como una primera especificación, para pasar a estimar un modelo lineal si la hipótesis β_3=1 no se rechaza en una primera estimación del modelo.

Sin embargo, conviene distinguir entre varios tipos de no linealidades que pueden presentarse en la practica. Consideraremos los modelos:

$$\begin{aligned}
&\text{a)}\quad Y_t = \beta_1 + \beta_2 e^{X_{2t}} + \beta_3 X_{3t} X_{4t} + \mu_t \\
&\text{b)}\quad Y_t + \beta_1 \ln Y_t = \beta_2 X_t + \mu_t \\
&\text{c)}\quad Y_t = \beta_1 + \beta_2 e^{\beta_3} X_{2t} + \mu_t \\
&\text{d)}\quad Y_t = \beta_1 + (\ln \beta_2) X_t + \mu_t \\
&\text{e)}\quad Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t^{\beta_3} + \mu_t
\end{aligned}$$

Estos cinco modelos tienen en común proponer relaciones no lineales entre la variable endógena por un lado y las variables explicativas y los coeficientes por otro.

Del modelo a) la no linealidad afecta únicamente a sus variables, pero no a los parámetros. En tal caso, basta definir unas nuevas variables: $Z_{2t}=\exp(X_{2t})$, $Z_{3t}=X_{3t}X_{4t}$, para obtener el modelo lineal:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 Z_{2t} + \beta_3 Z_{3t} + \mu_t$$

En definitiva, siempre que la no linealidad del modelo afecte únicamente a sus variables explicativas, entonces dicho problema queda resuelto mediante una transformación de datos. La única excepción a esta afirmación la constituyen los modelos en que la no linealidad afecte también a la variable endógena y de algún modo haga imposible expresarla de modo explícito como función de los vectores X_t y β.

Del modelo b) la forma funcional es una función implícita:

$$g\,(Y_t, X_t, \beta)=\mu_t, \qquad t=1,2,......T$$

Del modelo c) la no linealidad afecta tan sólo a sus coeficientes pero no a sus variables.

Del modelo d) la no linealidad es en los coeficientes sin que ello presente dificultades serias de estimación. En dicho modelo se estima un término independiente y un coeficiente de la variable X_t, y a continuación puede recuperarse el valor del parámetro β_2 mediante $\hat{\beta}_2 =$ exp(coeficiente de X_t), sin embargo el valor de β_2 así obtenido no heredaría las propiedades estadísticas que pudiera tener el estimador de $e^{\beta 2}$.

El modelo e) es otro ejemplo de modelo no lineal que no puede tratarse por métodos lineales.

Finalmente, es importante observar que, a diferencia de los modelos lineales, en modelos no lineales el número de parámetros no coincide necesariamente con el número de variables explicativas, como ocurre en los modelos b), c) y e) anteriores.

2. CLASIFICACIÓN DE MODELOS NO LINEALES

a. Modelos no lineales en la variables

$$Y_i = \alpha + \beta_1 X_i + \beta_2 X_i^2 + \beta_3 X_i^3 + ... + \mu_i$$

b. Modelos no lineales en los parámetros

Que se pueden distinguir en dos sub grupos:

i. Modelos intrínsicamente no lineales: Que no hay posibilidad de linealizarlos

Ejm.: $Y_i = \sqrt{\beta_1 + \beta_2 X_i} + \mu_i$

ii. Modelos intrínsicamente lineales: Que pueden linealizarse mediante transformaciones apropiadas

Ejm.: $Y_i = \beta_1 X_{i2}^{\beta_2} X_{i3}^{\beta_3} e^{\mu_i}$

Aplicando logaritmo:

$$Ln(Y_i) = Ln(\beta_1) + \beta_2 LnX_{i2} + \beta_3 Ln(X_{i3}) + \mu_i$$

Luego, el modelo puede expresarse de forma lineal:

$$Y_i' = \beta_1' + \beta_2 X_{i2}' + \beta_3 X_{i3}' + \mu_i$$

Donde:
$\beta_1' = Ln(\beta_1)$
$X_{i2}' = Ln(X_{i2})$
$X_{i3}' = Ln(X_{i3})$

3. DECISIÓN DE LA FORMA FUNCIONAL

Parte de la economía puede sugerir a veces la forma funcional de 2 ó más variables.

Por ejemplo, la teoría microeconómica postula una curva de costo medio de corto plazo de forma de U y una curva de costo medio fijo que decrece constante y tiende asintóticamente a cero a medida que los costos fijos totales se reparten sobre más unidades producidas.

Por otro lado, la observación del diagrama de dispersión entre las 2 variables puede sugerir la forma de la relación funcional, en tal caso cabe dos posibilidades:

- Intentar ajustar los datos a una relación no lineal adecuada.

- Buscar una transformación inicial de los datos de tal manera que los datos transformados aparezcan como aproximación lineal aplicándose a las técnicas expuestas.

4. TRANSFORMACIONES LINEALES MÁS UTILIZADAS

FUNCION	**TRANSFORMACION**	**FORMA**
$Y = \beta_o X^{\beta}{}_1 \ \varepsilon^{\mu}$	$Y^* = \beta^*{}_o + \beta_1 X^* + \mu$	Doble logaritmo
$\text{Ln } Y = \beta_o + \beta_1 X + \mu$	$Y^* = \beta_o + \beta_1 X + \mu$	Semi Logaritmo
$Y = \beta_o + \beta \dfrac{1}{X} + \mu$	$Y = \beta_o + \beta_1 Z + \mu$	Recíproca
$Y = \beta_o + \beta_1 X + \beta_2 X^2 + \mu$	$Y = \beta_o + \beta_1 X + \beta_2 W + \mu$	Polinomial

Donde:

$Y^* = \text{Ln } Y$	$\beta^*{}_o = \text{Ln } \beta_o$	$X^* = \text{Ln } X$
$Z = 1/X$	$W = X^2$	

LECCIÓN 2

MODELO DOBLEMENTE LOGARITMICO Y SEMILOGARITMICO

1. MODELO DOBLEMENTE LOGARITMICO

Considérese el siguiente modelo, conocido como el **modelo de regresión potencia:**

$$Y_i = \beta_1 X_i^{\beta_2} e^{\mu_i}$$

El cual puede se expresado alternativamente como:

$$\ln Y_i = \ln \beta_1 + \beta_2 \ln X_i + \mu_i$$

Donde **Ln** es el logaritmo natural. Si escribimos el modelo anterior como:

$$LnY_i = \alpha_0 + \beta_2 LnX_i + \mu_i$$

Donde $\alpha_0 = Ln\beta_1$, este modelo es lineal en los parámetros α_0 y β_2; y lineal en los logaritmos de las variables Y y X.

Excluyendo el término de perturbación μ_i del modelo, la relación entre X e Y se expresa como:

$$Y = A_0 X^{\beta} \qquad (1)$$

Donde:

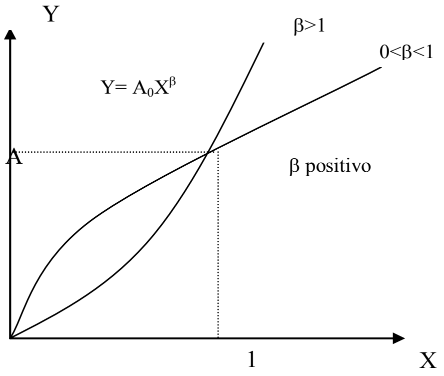
$$LnA_0 = \alpha_0$$

Ejemplo:
En el modelo (1) si $\beta = -1$, la ecuación $LnA_0 = \alpha_0$ resulta:

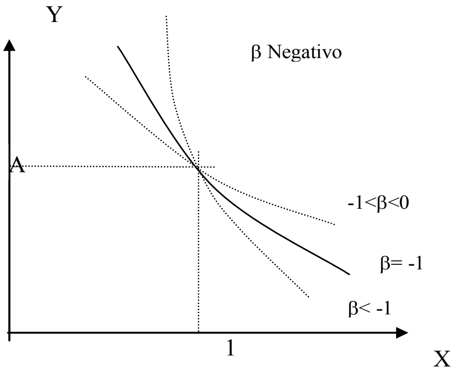
$XY = A_0$, qué es una hipérbola equilátera.

Si Y representa la cantidad comprada de un bien y X el precio unitario de dicho bien, entonces $XY = A_0$ sería una curva de demanda con elasticidad constante de valor –1 y con un gasto total en ese bien constante, independiente del precio.

Como podemos notar en las siguientes gráficas:



Gráfica 1



Gráfica 2

2. MODELO SEMILOGARITMICO

Veamos un caso especial del Modelo Semilogarítmico, cuando el regresor X representa al tiempo:

Ejemplo 1. ¿Cómo medir la tasa de crecimiento?

$$Y_t = Y_o (1 + r)^t \qquad (1)$$

Donde r es tasa de crecimiento compuesta de Y (es decir, a través del tiempo). Tomando el logaritmo natural del modelo anterior, podemos escribir:

$$\text{Ln } Y_t = \text{Ln } Y_o + t \text{ Ln } (1 + r) \qquad (2)$$

Sea:

$$\beta_1 = \text{Ln } Y_o$$
$$\beta_2 = \text{Ln } (1 + r)$$

Se puede escribir (2) de la siguiente manera:

$$\text{Ln } Y_t = \beta_1 + \beta_2 t$$

Agregando el término de perturbación, se obtiene:

$$\text{Ln } Y_t = \beta_1 + \beta_2 t + u_t \qquad (3)$$

Ejemplo 2. Sea el modelo semi logarítmico:

$$\text{Ln } Y = \alpha + \beta X + \mu$$

Si calculamos la pendiente:

$$\frac{1}{Y}\frac{dY}{dX} = \beta$$

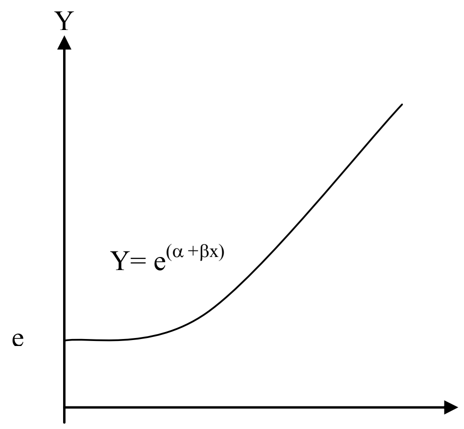
Como la función esta solamente definida para valores positivos de Y. Podemos escribir la función de la siguiente forma:

$$Y = e^{\alpha - \beta X}$$

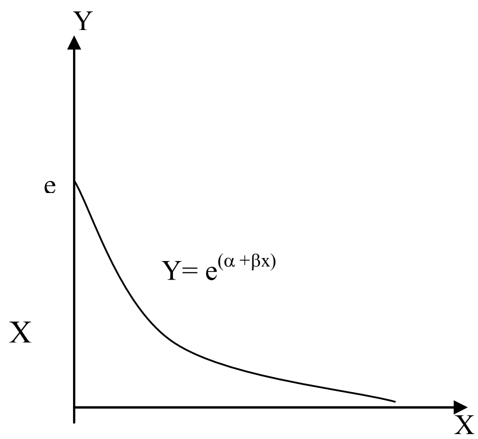
La ordenada en el origen viene dada por e^{α}, y la pendiente será positiva o negativa dependiendo del signo de β.

La función describe en ese caso a una variable Y que muestra una tasa proporcional constante de crecimiento ($\beta > 0$) o decrecimiento ($\beta < 0$).

Gráficas del modelo semilogarítmico



Gráfica 3



Gráfica 4

LECCIÓN 3

MODELO RECIPROCO, POLINOMIAL Y LOGÍSTICO

1. MODELO RECIPROCO

Los modelos del siguiente tipo se conocen como modelos recíprocos:

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X_i^* + \mu_i$$

$$\text{Donde: } X_i^* = \frac{1}{X_i}$$

A pesar que este modelo es no lineal en la variable X, si es lineal en los parámetros $(\beta_1 \text{ y } \beta_2)$ y, por consiguiente, es un modelo de regresión lineal.

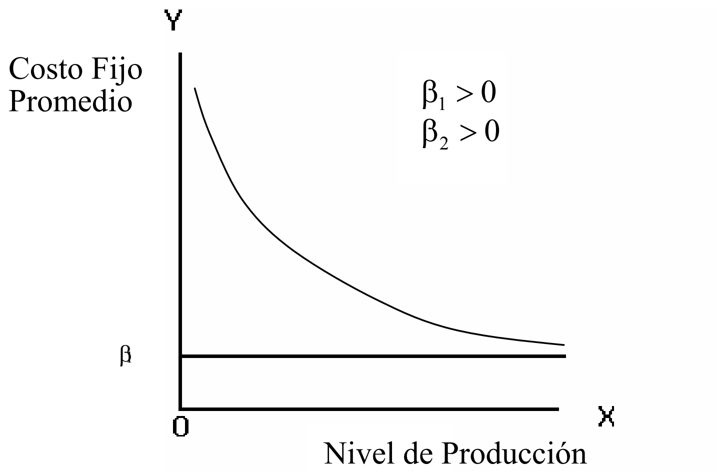
Este modelo tiene las siguientes características:

- A medida que X aumenta indefinidamente, el término $\beta_2\left(\frac{1}{X}\right)$ se acerca a cero (β_2 es una constante) y Y se aproxima al valor límite o asintótico β_1. Por consiguiente este tipo de modelos han construido en ellos un valor asintótico o límite que tomará la variable dependiente cuando el valor de la variable X aumente indefinidamente.

- La pendiente del modelo mostrado es: $\frac{dY}{dX} = -\beta_2\left(\frac{1}{X^2}\right)$

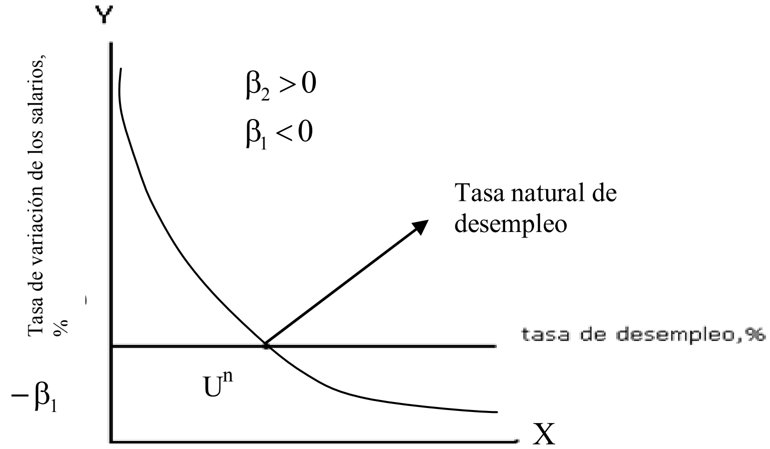
  lo que implica que si β_2 es positivo, la pendiente siempre es negativa y si β_2 es negativo, la pendiente es positiva.

- Algunas formas probables de la curva correspondiente al modelo planteado son las siguientes:



Gráfica 1

En la gráfica 1 se relaciona el Costo Fijo Promedio (CFP) de producción (eje Y) con el nivel de producción (eje X). Como se muestra, el CFP desciende continuamente a medida que aumenta la producción (porque el costo fijo se distribuye entre un gran número de unidades) y, en este caso se vuelve asintótico en el eje de la producción al nivel de β_1.



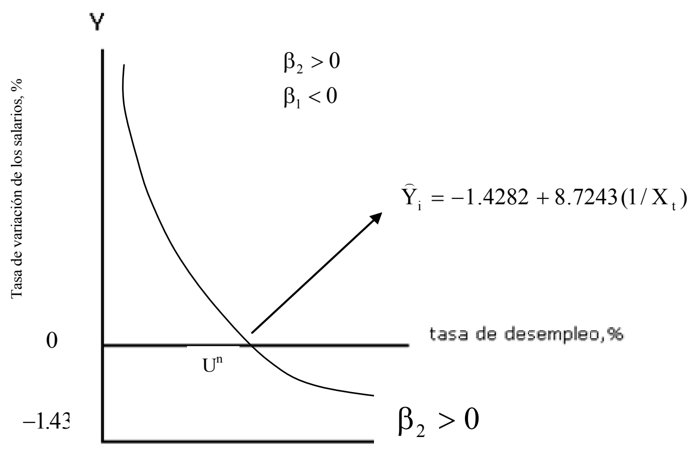
Gráfica 2

Otra de las aplicaciones es la conocida Curva de Phillips de macroeconomía la cual se obtuvo con base de datos de la tasa de cambio porcentual de los salarios nominales (Y) y la tasa porcentual de desempleo.

Como se muestra en la gráfica 2, existe una asimetría en la respuesta de los cambios salariales al nivel de desempleo: si la tasa de desempleo está por debajo de U^n (tasa natural de desempleo) por cada unidad de cambio en el desempleo, los salarios aumentan con mayor rapidez de lo que caen debido a un cambio equivalente cuando la tasa de desempleo está por encima del nivel natural β_1 indicando la base asintótica para el cambio salarial.

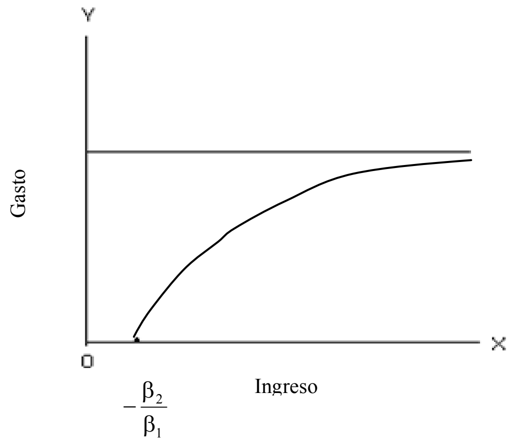
$$\hat{Y}_t = -1.4282 \quad + \quad 8.2743\frac{1}{X_t} \qquad\qquad r^2 = 0.3849$$

$$(2.0675) \quad (2.8478) \qquad\qquad F_{1,15} = 9.39$$



Gráfica 3

Esta gráfica nos muestra que la base salarial es de –1.43%, es decir, a medida que X aumenta indefinidamente, la disminución porcentual en los salarios no será superior al 1.43% al año. Además obsérvese que el valor de r^2 es bajo (38.4%), aunque el coeficiente de pendiente es estadísticamente diferente de cero y tiene el signo correcto, lo que es una razón para no enfatizar indebidamente el valor de r^2.



Gráfica 4

Como aplicación importante también podemos mencionar a la Curva de Gasto de Engel, que relaciona el gasto del consumidor en un bien frente a su ingreso total. Sea *Y* el gasto de un bien y *X* el ingreso entonces, para algunos bienes se presentan las siguientes características:

- Existe un umbral o nivel crítico de ingreso por debajo del cual el bien no es comprado; en la figura este umbral se encuentra a nivel de: $-\left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\right)$.
- Existe un nivel de satisfacción de consumo que el consumidor no traspasa sin importar que tan alto sea el ingreso. Este nivel no es otra cosa que la asíntota β_1.

2. MODELO LOGISTICO

Una curva similar a la recíproca es la logística, que también tiene una asíntota superior para un valor finito y una asíntota inferior para el valor cero, pero que tiene una forma más simétrica respecto a las dos asíntotas:

$$Y = \frac{K}{1 + be^{-at}}$$

Donde a, b y k son parámetros que deben determinarse. Se ha escrito Y para la función del tiempo t, dado que ésta es la práctica más común, pero en determinados casos es posible sustituir t por alguna variable independiente X.

Queda claro que:

$$Y \to K \text{ cuando } t \to \infty \qquad \text{e} \qquad Y \to 0 \text{ cuando } t \to -\infty$$

De forma que K es asíntota superior y cero la inferior. La primera derivada es:

$$\frac{dY}{dt} = \frac{a}{K}\ Y\ (K - Y)$$

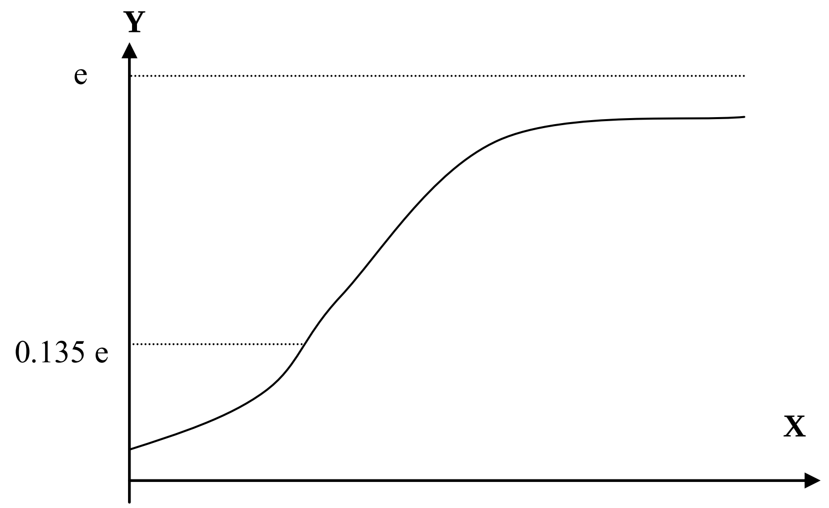
Así pues la tasa de cambio de Y con respecto a t es proporcional al nivel corriente de Y, y también a la distancia que queda por recorrer entre el valor y el nivel de saturación K. La primera derivada es positiva para todos los valores de t. La segunda derivada se puede escribir como:

$$\frac{d^2Y}{dt^2} = \frac{\alpha}{K}\left(K - 2Y\right)\frac{dY}{dt}$$

Igualándola a cero el siguiente punto de inflexión.

$$t = \frac{1}{a} \text{Ln } b \qquad\qquad Y = \frac{K}{2}$$

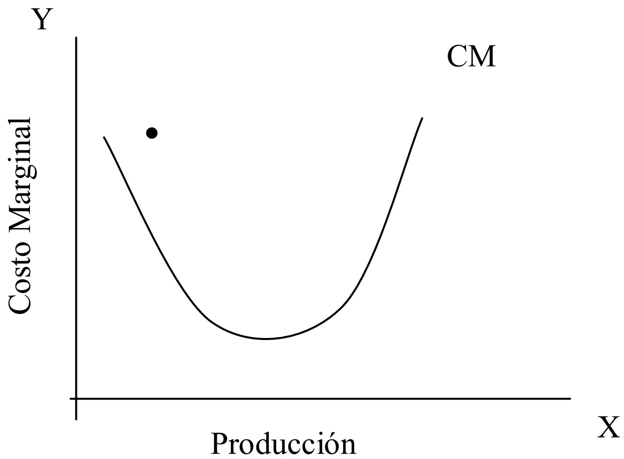
Por lo tanto cuando Y < K/2 el valor "grande" de K-Y domina al valor "pequeño" de Y; y hace que dY/dt aumente. Cuando Y se aproxima a K/2 las dos fuerzas empiezan a compensarse de forma que dY/dt alcanza su valor máximo cuando Y= K/2 y a partir de aquí disminuye suavemente a medida que Y tiende a su nivel de saturación K, la forma típica de una curva logística aparece en la gráfica 5.



Gráfica 5

3. MODELO POLINOMIAL

Para ordenar las ideas, considérese la gráfica que relaciona el costo marginal del corto plazo (CM) de la producción de un bien (Y) con el nivel de su producto (X). La curva de CM dibujada en la gráfica 6, la curva con forma de U de los textos, muestra que la relación entre CM y producto es no lineal. Si se fuera a cuantificar esta relación a partir de los puntos dispersos dados, ¿cómo se haría? En otras palabras, ¿qué tipo de modelo econométrico recogerá la naturaleza primero decreciente y luego creciente del costo marginal?



Gráfica 6

Geométricamente, la curva CM de la gráfica mencionada anteriormente representa una parábola. Matemáticamente, la parábola está representada por la siguiente ecuación:

$$Y = \beta o + \beta_1 X + \beta_2 X^2 \qquad (1)$$

La versión estocástica de (1) puede escribirse así:

$$Yi = \beta o + \beta_1 X_i + \beta_2 X^2_i + u_i \qquad (2)$$

Que se denomina una regresión polinomial de segundo grado.

La regresión polinomial de grado k general puede escribirse así:

$$Yi = \beta o + \beta_1 X_i + \beta_2 X^2_i + ... + \beta_k X^k_i + u_i \qquad (3)$$

Ejemplo Ilustrativo:

Impacto del Empleo en la Producción: Función de Producción Cobb Douglas

La función de producción de Cobb Duoglas, es a menudo usada para estudiar la producción, en base a los insumos capital y trabajo de una economía. El objetivo principal es determinar el impacto que tiene el empleo en la productividad, es por ello que se usará este modelo para determinar dicho impacto, tomando como supuesto que el factor capital (inversión) se mantiene constante.

La función de Cobb Douglas en su forma estocástica, se expresa según:

$$Y_i = \alpha K^{\delta} L^{\beta} e^{\mu_i}$$

Donde: Y = Producto Bruto Interno

K = Insumo capital

L = Insumo Trabajo

μ = Término de perturbación estocástico.
e = Base del Logaritmo Natural

El modelo a utilizar, determina que hay dos factores centrales que determinan la producción, éstos son el insumo capital y el insumo trabajo.

Sin embargo, esta ecuación es de carácter no lineal. Mediante transformaciones apropiadas se transformará a una relación lineal.

Así se obtiene: $\text{Ln } Y = \text{Ln } \alpha + \delta \text{ Ln } K + \beta \text{ Ln } L + \mu$

$$y = c + \delta k + \beta l + \mu$$

Obtenemos, entonces un modelo linealizado, el cual tiene las siguientes propiedades:

- El parámetro δ, es la elasticidad del producto con respecto al insumo capital, manteniéndose constante el insumo trabajo.
- En el corto plazo, β es el parámetro que nos es de mayor interés, ya que éste mide el cambio porcentual en la producción debido, a una variación porcentual en el trabajo, ello bajo el supuesto de que el insumo capital se mantiene constante.
- La suma entre los parámetros δ y β nos da información acerca de los rendimientos a escala, es decir la respuesta de la producción ante un cambio proporcional en los insumos. Si la suma es 1, entonces existe rendimientos constantes a escala, por ejemplo si se duplican los insumos, entonces la producción se duplicará. Si la suma es inferior a 1, existe rendimientos decrecientes a escala, por ejemplo si se duplican los insumos, entonces la producción crecerá en menos del doble. Por último si la suma es superior a 1, existe rendimientos crecientes a escala, por ejemplo si se duplican los insumos, la producción crecerá en más del doble.

LABORATORIO

Ejercicio Aplicativo 1[1]:
Con la información proveniente de la Encuesta Nacional del Hogares realizada por el INEI en el IV trimestre de 1997 (Enaho 97-IV), se modeló la siguiente función de consumo, que es la presentada por Robles (1996), es de tipo exponencial y consiste en:

$$C_k = \alpha_0 P_k^{\alpha_1} \prod_{j=1}^{j=n} P_j^{j} I^{\alpha_2} E^{\alpha_3} M^{\alpha_4} N^{\alpha_5} A^{\alpha_6} P^{\alpha_7} e^{\alpha_8 O}$$

donde:

Ck	= Consumo familiar per cápita en el bien k
k	= 1,..., n
n	= Número de bienes y servicios en el mercado
αi	= Coeficientes que muestran la influencia de cada variable independiente sobre el consumo
P_k	= Precio del bien k
P_j	= Precio del bien j (diferente a k)
I	= Ingreso familiar per cápita
E	= Años de estudios de la madre
M	= Número de miembros en el hogar
N	= Número de niños en el hogar
A	= Años de constituido el hogar
P	= Número de perceptores en el hogar
O	= Ocupación del jefe de hogar
Π	= Productoria
e	= 2.718281828

Cada una de las variables independientes del modelo tiene alguna influencia en el consumo pues (a excepción de los precios) estarían enmarcando los gustos y preferencias de las familias.

Las elasticidades precio e ingreso por estrato económico, calculadas a partir del modelo se muestras en los cuadros adjuntos.

Así observamos que, en el primer cuadro nos muestra la disminución (incremento) porcentual de la cantidad consumida de una variedad ante el aumento (reducción) del 1 % en su nivel de precios. Por ejemplo si el kilogramo de bistek de res aumentara en 10 % los hogares del estrato medio reducirán el consumo en 5,2 %.

En el cuadro 2, cada número indica el incremento (disminución) porcentual de la cantidad consumida de una variedad ante el aumento (caída) de 1 % en el ingreso familiar percápita. Por ejemplo si este ingreso se incrementara en 10 % el consumo de zanahoria de los hogares del estrato bajo se elevará en 4,27 %.

[1] Del documento: Elasticidad de la Demanda de los Principales Bienes y Servicios Consumidos por las Familias en Lima Metropolitana , elaborado por el INEI

Cuadro 1: CLASIFICACION DE LAS VARIEDADES DE CONSUMO SEGUN SUS ELASTICIDADES PRECIO, POR ESTRATO

³	³ Estrato Bajo		³ Estrato Medio		³ Estrato Alto	³
	Corte de Cabello Mujer	-0,12	Corte de Cabello Hombre	-0,13	Pje. en Ómnibus Interpr	-0,01
Más	Corte de Cabello Hombre	-0,15	Jabón de Tocador	-0,15	Jabón de Tocador	-0,18
de	Jabón de Tocador	-0,16	Desodorantes	-0,21	Pje. en Taxi (auto)	-0,22
-0,4	Hígado de Res	-0,21	Corte Unico de Res	-0,21	Helados	-0,24
	Periódico	-0,42	Pje. en Omnibus y Micro	-0,40	Leche en Polvo	-0,40
-0,40	Res, Churrasco	-0,42	Res, Churrasco	-0,40	Tomate Italiano	-0,41
a	Pje. en Colectivo	-0,44	Jurel Fresco	-0,43	Menú (en restaurantes)	-0,42
-0,49	Lenteja	-0,47	Gasolina	-0,44	Papa Amarilla	-0,42
	Pje. en Ómnibus y Micro	-0,50	Fideos Tallarín (Envasado)	-0,50	Papaya	-0,51
-0,50	Jab¢n para lavar ropa	-0,53	Res, Sancochado	-0,52	Pan Franc,s	-0,51
a	Zapallo Macre	-0,56	Res, Bisteck	-0,52	Menudencia de Pollo	-0,56
-0,60	Margarina Envasada	-0,57	Periódico	-0,52	Arveja Verde	-0,56
	Zanahoria	-0,63	Men£ (en restaurantes)	-0,62	Pl tano de Seda	-0,63
-0,60	Limón	-0,63	Arroz Corriente	-0,62	Pollo Eviscerado	-0,66
a	Mandarina	-0,64	Menudencia de Pollo	-0,65	Jab¢n para lavar ropa	-0,67
-0,69	Papel Higiénico	-0,65	Jabón para lavar ropa	-0,66	Toallas Sanitarias	-0,67
	Arveja Verde	-0,65	Gallina Eviscerada	-0,66	Zanahoria	-0,69
	Toallas Sanitarias	-0,71	Toallas Sanitarias	-0,71	Arroz Corriente	-0,70
-0,70	Tomate Italiano	-0,71	Lim¢n	-0,76	Lim¢n	-0,73
a	Res, Bisteck	-0,71	Cebolla de Cabeza (Roja)	-0,77	Bonito Fresco	-0,75
-0,79	Papaya	-0,72	Jamonada	-0,79	Choclo Criollo	-0,76
	Detergente	-0,82	Champú	-0,81	Jamonada	-0,82
-0,8	Café instant neo en lata	-0,84	Ajo Entero	-0,81	Detergente	-0,83
a	Pan Tolete (Labranza)	-0,87	Plátano de Seda	-0,84	Champú	-0,83
-0,99	Azúcar Blanca	-0,90	Choclo Criollo	-0,85	Gas Propano	-0,85
	Huevos a Granel	-0,94	Arroz Superior	-0,86	Manzana Delicia	-0,86
	Gallina Eviscerada	-0,95	Gas Propano	-0,86	Bebidas Gaseosas	-0,91
	Carne Molida de Res	-1,02	Margarina a Granel	-1,05	Leche Evaporada	-1,04
Menos	Gas Propano	-1,03	Huevos a Granel	-1,06	Pje. en Omnibus y Micro	-1,05
de	Manzana Delicia	-1,12	Leche Evaporada	-1,17	Margarina a Granel	-1,05
-1,00	Bebidas Gaseosas	-1,21	Bebidas Gaseosas	-1,19	Margarina Envasada	-1,07

Cuadro 2: CLASIFICACIÓN DE LAS VARIEDADES DE CONSUMO SEGÚN SUS ELASTICIDADES INGRESO, POR ESTRATO DE INGRESO

	Estrato Bajo		Estrato Medio		Estrato Alto	
Menos	Lenteja	0,200	Corte de Cabello Hombre	0,183	Menú (en restaurantes)	-0,191
de	Gas Propano	0,209	Gas Propano	0,214	Pje. en Ómnibus y Micro	-0,189
0,3	Kerosene	0,210	Jurel Fresco	0,243	Gas Propano	0,146
	Toallas Sanitarias	0,227	Desodorantes	0,268	Corte de Cabello Hombre	0,147
	Frejol Canario	0,235	Papa Blanca	0,276	Desodorantes	0,156
	Margarina Envasada	0,305	Jabones para Lavar Ropa	0,301	Detergente	0,304
0,30	Menudencia de Pollo	0,310	Tomate Italiano	0,302	Cebolla de Cabeza (Roja)	0,305
a	Arroz Corriente	0,321	Pje. en Ómnibus y Micro	0,318	Pje. en Colectivo	0,312
0,40	Bonito Fresco	0,334	Arroz Corriente	0,338	Zapallo Macre	0,314
	Choclo Criollo	0,340	Arveja Verde	0,352	Zanahorias	0,326
	Ajo Entero	0,410	Aceite Vegetal	0,401	Huevos a Granel	0,404
0,40	Pje. en Ómnibus y M	0,424	Menú (en restaurantes)	0,409	Tomate Italiano	0,421
a	Zanahorias	0,427	Cebolla de Cabeza (Roja)	0,417	Choclo Criollo	0,421
0,50	Jabón de Tocador	0,431	Detergente	0,428	Leche Evaporada	0,426
	Zapallo Macre	0,445	Margarina a Granel	0,443	Arroz Superior	0,450
	Aceite Vegetal	0,447	Champú	0,448	Azúcar Blanca	0,451
	Pan Francés	0,506	Manzana Delicia	0,504	Helados	0,506
0,50	Papa Blanca	0,522	Limón	0,532	Periódico	0,514
a	Menú (en restaurantes)	0,528	Papa Amarilla	0,557	Margarina a Granel	0,535
0,70	Res, Bisteck	0,536	Azúcar Blanca	0,561		0,540
	Huevos a Granel	0,538	Plátano de Seda	0,566	Manzana Delicia	0,553
	Azúcar Blanca	0,557	Textos Esc. Educ. Prim.	0,586	Carne Carnero	0,560
	Leche Evaporada	0,769	Res, Bisteck	0,757	Papel Higiénico	0,710
0,70	Arroz Superior	0,775	Res, Sancochado	0,770	Gasolina	0,717
a	Manzana Delicia	0,783	Pasaje en Taxi (auto)	0,782	Pasaje en Taxi (auto)	0,733
1,00	Corte Único de Res	0,794	Bebidas Gaseosas	0,840	Ajo Entero	0,789
	Pollo Eviscerado	0,795	Res, Churrasco	0,915	Res, Sancochado	0,906
Más	Carne Carnero	1,053	Cerveza Blanca (Botella)	1,526	Fideos Env. Popular	1,204
de	Bebidas Gaseosas	1,065	Gasolina	1,733		
1,00	Res, Churrasco	1,261				
	Cerveza Blanca (Botella)	1,676				

Ejercicio aplicativo 2:

Caso Hipotético:
En el siguiente cuadro se muestran los datos básicos de un estudio de la demanda de carros nuevos en Perú, durante los años 1986 y 2003. Las variables consideradas para el análisis fueron las siguientes:

X_1 = Índice del Precio Real de Automóviles Nuevos
X_2 = Ingreso Disponible Real (en millones de nuevos soles a precios de 1994)
X_3 = Automóviles en Circulación al principio de cada año (miles de unidades)
Y = Ventas de Automóviles Nuevos (miles de unidades).

Demanda de Automóviles Nuevos y Variables Relacionadas, 1986-2003.

Obs	X_1	X_2	X_3	Y
1986	126.5	83.4	18.7	1.10
1987	128.5	82.6	17.9	1.53
1988	128.5	90.9	18.9	1.93
1989	120.5	99.3	19.4	2.87
1990	117.0	111.6	20.1	3.51
1991	121.0	115.6	21.5	3.51
1992	133.8	109.0	22.3	1.96
1993	131.0	118.5	22.7	2.72
1994	134.3	127.0	23.2	3.46
1995	144.9	147.9	24.5	3.76
1996	186.6	184.9	30.6	4.87
1997	186.6	200.5	33.1	6.37
1998	181.5	203.7	35.7	5.09
1999	195.7	209.2	37.6	4.19
2000	188.2	218.7	39.3	5.78
2001	190.2	221.6	41.6	5.47
2002	196.6	236.3	43.0	7.20
2003	193.4	247.2	47.0	5.90

Con estos datos, podemos estimar la siguiente regresión doble-log:

$$\log(Y) = b_0 + b_1\log(X_1) + b_2\log(X_2) + b_3\log(X_3)$$

Puesto que todas las variables se expresan en términos de logaritmos, los coeficientes de regresión estimados, representan las elasticidades de Y respecto de las variables independientes. La regresión estimada utilizando el Eviews es la siguiente:

Dependent Variable: Log(Y)				
Method: Least Squares				
Sample: 1 18				
Included observations: 18				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
Log(X1)	-1.422016	0.543972	-2.614136	0.0204
Log(X2)	3.215935	0.454285	7.079112	0.0000
Log(X3)	-1.478869	0.584988	-2.528034	0.0241
C	-2.720747	1.732413	-1.570496	0.1386
R-squared	0.942267	Mean dependent var		1.260016
Adjusted R-squared	0.929896	S.D. dependent var		0.526174
S.E. of regression	0.139316	Akaike info criterion		-0.911017
Sum squared resid	0.271724	Schwarz criterion		-0.713157
Log likelihood	12.19916	F-statistic		76.16576
Durban-Watson stat	1.715898	Prob(F-statistic)		0.000000

$\log(Y) = -2.721 - 1.422\log(X_1) + 3.216\log(X_2) - 1.479\log(X_3)$

$R^2 = 0.942$ Es decir, la ecuación ajusta los datos en un 94.2%, se puede apreciar que tanto la prueba global de los coeficientes como las pruebas individuales resultan significativas (a excepción del término independiente).

En base a estos resultados, podemos concluir que la elasticidad-precio de la demanda de automóviles nuevos en este período era de aproximadamente –1.4, con una elasticidad-ingreso de aproximadamente 3.2.

Ejercicio Aplicativo 3

Suponga que quiere plantear un modelo de regresión lineal para explicar, a partir de una muestra de 1500 individuos de una región, la relación entre el nivel de ingresos y el nivel de estudios y la edad. Suponga que quiere probar la sospecha de que el ingreso, si bien crece con el nivel de estudios y la edad, tiende a incrementarse menos rápidamente en los últimos años de vida que en los primeros. ¿Cómo plantearía el modelo?

La especificación más simple para probar esta idea sería:

$$\text{Ingreso}_i = a + b_1\text{Educación}_i + b_2\text{Edad}_i + b_3\text{Edad}_i^2 + \varepsilon_i$$

En esta regresión, la hipótesis formalizada en el enunciado implicaría: "b_1" positivo y "b_2" negativo. Para comprender intuitivamente la razón del signo imaginemos la regresión con sólo 2 variables (educación y edad). En esta regresión, es claro que los errores serían crecientes con la edad, es decir, el modelo se equivocaría más para el caso de las personas mayores, dado que para éstas, la relación entre edad y el Ingreso no sería la misma que para el resto de la muestra.

En concreto, el parámetro que relaciona edad e Ingreso tendería a sobrestimar el Ingreso de las personas mayores, generando residuos negativos para ellos. En definitiva, la serie de residuos sería decreciente con la edad (edades mayores, residuos más grandes y negativos).

Si ahora hacemos depender esa serie de residuos con la edad al cuadrado, la relación sería necesariamente negativa.

Ejercicio Aplicativo 4:

Los siguientes datos corresponden a los precios de venta (z) de un modelo de automóviles usados durante w años:

w (años)	**z (dólares)**
1	6350
2	5695
2	5750
3	5395
5	4985
5	4895

- Determinar una curva de la forma $Z = cd^w$
- Calcule el precio de venta de un vehículo que tiene cuatro años de uso

Linealizamos el modelo: $Z = cd^w$

$$\text{Ln}(Z) = \text{Ln}(c) + \text{Ln}(d)W$$

Agregando el término de perturbación, el modelo puede expresarse linealmente como:

$$Y = \beta o + \beta_1 W + e$$

Utilizando el software Eviews con las variables transformadas, obtenemos:

Dependent Variable: Y
Method: Least Squares
Date: 08/17/04 Time: 10:14
Simple: 1 6
Included observations: 6

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	8.781307	0.020783	422.5318	0.0000
W	-0.056886	0.006173	-9.214754	0.0008

R-squared	0.955012	Mean dependent var	8.610649
Adjusted R-squared	0.943764	S.D. dependent var	0.097405
S.E. of regression	0.023099	Akaike info criterion	-4.436891
Sum squared resid	0.002134	Schwarz criterion	-4.506305
Log likelihood	15.31067	F-statistic	84.91168
Durban-Watson stat	2.052046	Prob(F-statistic)	0.000771

Podemos observar que los coeficientes han resultado significativos (Prob<0.05). Además, se obtiene un R^2 de 95.5%, por lo cual el modelo se ajusta adecuadamente a los datos.

Para determinar el valor de los coeficientes iniciales del modelo, se realiza la siguiente transformación:

$\beta o = Ln(c) \rightarrow c = \exp(\beta o)$
$\beta_1 = Ln(d) \rightarrow d = \exp(\beta_1)$

Luego:

$c = \exp(8.781307) = 6511.38199$
$d = \exp(-0.056886) = 0.94470176$

La ecuación de regresión final queda determinada por:

$$\hat{Z} = 6511.4 \times (0.945)^{W}$$

Por lo tanto la estimación del precio de venta para un auto que tiene 4 años de uso sería:

$$\hat{Z}_{(w=4)} = 6511.4 \times (0.945)^{4}$$

$$\hat{Z}_{(w=4)} = 5192.8 \text{ dólares}$$

Ejercicio Aplicativo 5:

Con los siguientes datos estimar las funciones de costo total, medio y marginal:

Y	X	X^2	X^3
193	1	1	1
226	2	4	8
240	3	9	27
244	4	16	64
260	6	36	216
274	7	49	343
297	8	64	512
350	9	81	729
420	10	100	1000

La curva de costo total (CT = Y) planteada es la siguiente:

$$CT = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3$$

Para que las curvas de CM y CMg tengan forma de U, se debe cumplir:

$a_0 \geq 0$ $a_2 < 0$ $a_1 > 0$ $a_3 > 0$ $a_2^2 < 3 a_3 a_1$

a_0: Costo fijo = costo de producción-cero. En el corto plazo $a_0 > 0$.

$CM = Y/X$ $CMg = dY/dX$

Utilizando el Eviews, obtenemos las siguientes salidas:

Dependent Variable: Y				
Method: Least Squares				
Date: 08/26/04 Time: 13:10				
Sample: 1901 1909				
Included observations: 9				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	144.1040	5.557702	25.92870	0.0000
X1	61.50263	4.195559	14.65899	0.0000
X2	-12.64826	0.853580	-14.81790	0.0000
X3	0.925967	0.050693	18.26626	0.0000
R-squared	0.998993	Mean dependent var		278.2222
Adjusted R-squared	0.998390	S.D. dependent var		69.44202
S.E. of regression	2.786708	Akaike info criterion		5.188701
Sum squared resid	38.82870	Schwarz criterion		5.276356
Log likelihood	-19.34915	F-statistic		1654.220
Durbin-Watson stat	2.927062	Prob(F-statistic)		0.000000

Entonces, se tiene: $CT = 144.1040 + 61.50263X - 12.64826X^2 + 0.925967X^3$

Observamos que el R^2 es alto (99%), todas las variables son significativas (la probabilidad asociada al t es menor a 0.5%) y el F calculado es alto. Se concluye que el modelo explica al costo total.

El costo medio asociado con la curva de costo cúbica total planteada es la siguiente:

$$CM = Y/X = a_0/X + a_1 + a_2X + a_3X^2$$

Usando el Eviews y calculando las variable 1/X y Y/X, obtenemos las siguientes salidas:

Dependent Variable: YTANSP				
Method: Least Squares				
Date: 08/26/04 Time: 13:11				
Sample: 1901 1909				
Included observations: 9				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	64.72605	2.761899	23.43534	0.0000
XTRASNP	140.8717	2.418462	58.24846	0.0000
X1	-13.40488	0.741900	-18.06831	0.0000
X2	0.974348	0.053162	18.32783	0.0000
R-squared	0.999905	Mean dependent var		71.94334
Adjusted R-squared	0.999847	S.D. dependent var		51.98672
S.E. of regression	0.642476	Akaike info criterion		2.254128
Sum squared resid	2.063877	Schwarz criterion		2.341783
Log likelihood	-6.143574	F-statistic		17458.15
Durbin-Watson stat	2.539902	Prob(F-statistic)		0.000000

Entonces, se tiene que: $CM = 140.8717/X + 64.72605 - 13.40488X + 0.974348X^2$
El costo marginal asociado con la curva de costo cúbica total planteada es la siguiente:

$$Cmg = Yt - Yt\text{-}1 = a_1 + 2a_2X + 3\,a_3\,X^2$$

Las salidas obtenidas en el e-views, luego de la transformación de la variable Yt – Yt-1 son las siguientes:

Dependent Variable: YMG				
Method: Least Squares				
Date: 08/26/04 Time: 13:25				
Sample(adjusted): 1902 1909				
Included observations: 8 after adjusting endpoints				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	73.63144	11.10574	6.630037	0.0012
X1	-27.11448	4.268257	-6.352588	0.0014
X2	2.692362	0.353220	7.622330	0.0006
R-squared	0.952344	Mean dependent var		28.37500
Adjusted R-squared	0.933282	S.D. dependent var		22.51944
S.E. of regresión	5.816722	Akaike info criterion		6.639347
Sum squared resid	169.1713	Schwarz criterion		6.669138
Log likelihood	-23.55739	F-statistic		49.95978
Durbin-Watson stat	2.832280	Prob(F-statistic)		0.000496

La curva de costo marginal sería: $Cmg = 73.63144 - 27.11448X + 2.692362X^2$

Ejercicio de autoconocimiento

¿Porqué hacer una predicción en Modelos No lineales?

	SI	NO	NO SÉ
1. Considero útil porque en ciertas ocasiones se deben considerar modelos que no son lineales en los parámetros.			
2. Porque permitirá hacer un análisis de regresión en un Modelo no lineal.			
3. Porque permitirá también interpretar y estimar estos modelos.			
4. Porque en ocasiones un modelo de regresión no lineal en los parámetros resultan de utilidad.			
5. Porque por razones prácticas o teóricas imponen su utilización.			
6. Porque es un reto estimar estos modelos.			
7. Porque se puede construir un modelo, usando algún programa de computadora.			
8. Para utilizar los modelos no lineales y representar las relaciones entre variables.			
9. Para linealizar modelos mediante transformaciones apropiadas.			
10. Para reconocer modelos no necesariamente lineales			

CALIFICACION

Puntuar con un punto cada respuesta "SI".
Si obtienes de 1 - 3 puntos tienes pocas expectativas de hacer una buena predicción en Modelos no lineales.
Si tienes entre 4 – 7, tienes buenas expectativas de hacer una buena predicción en Modelos no lineales.
Y si tienes entre 8 – 10, denotas excelentes expectativas de hacer una buena predicción en Modelos no lineales.

RESUMEN

Modelos no lineales son modelos cuya ***estructura matemática*** no es la del Modelo Lineal General.

La clasificación de modelos no lineales es:

Modelos no lineales en las variables: $Y_i = \alpha + \beta_1 X_i + \beta_2 X_i^2 + \beta_3 X_i^3 + \ldots + \mu_i$

Modelos no lineales en los parámetros: Que se pueden distinguir en dos sub grupos:

- Modelos intrínsicamente no lineales: Que no hay posibilidad de linealizarlos

  Ejm.: $Y_i = \sqrt{\beta_1 + \beta_2 X_i} + \mu_i$

- Modelos intrínsicamente lineales: Que pueden linealizarse mediante transformaciones apropiadas

  Ejm.: $Y_i = \alpha X_{i1}^{\beta_1} X_{i2}^{\beta_2} e^{\mu_i}$

Las transformaciones lineales más utilizadas son:

Función	**Transformación**	**Forma**
$Y = \beta_o X^{\beta}{}_1 \ \varepsilon^{\mu}$	$Y^* = \beta^*_o + \beta_1 X^* + \mu$	Doble logaritmo
$\mathrm{Ln}\, Y = \beta_o + \beta_1 X + \mu$	$Y^* = \beta_o + \beta_1 X + \mu$	Semi Logaritmo
$Y = \beta_o + \beta \frac{1}{X} + \mu$	$Y = \beta_o + \beta_1 Z + \mu$	Recíproca
$Y = \beta_o + \beta_1 X + \beta_2 X^2 + \mu$	$Y = \beta_o + \beta_1 X + \beta_2 W + \mu$	Polinomial

Donde:

$Y^* = \mathrm{Ln}\, Y$	$\beta^*_o = \mathrm{Ln}\, \beta_o$	$X^* = \mathrm{Ln}\, X$
$Z = 1/X$	$W = X^2$	

EXPLORACIÓN ON LINE

Limitaciones del **modelo** de intervención frente al **modelo** no **lineal.**

www.banrep.gov.co/docum/borrasem/intro065.htm - 5k

Estimación general no lineal

www.softwarecientifico.com/paginas/staestad.htm

LECTURA

¿Puede explicarse el precio externo del café con un modelo econométrico no lineal?

El precio internacional del café, como el de la mayoría de los productos primarios se ha caracterizado por la inestabilidad y las grandes fluctuaciones. La formación del precio del café verde es un proceso complejo que depende de una multiplicidad de variables, como la calidad y disponibilidad del producto, el lugar de origen, el sitio de compra, las expectativas de precios y las características del grano (1).
Adicionalmente, el mercado internacional del café esta autorizado por la existencia de pactos y acuerdos entre los países productores y consumidores del grano que buscan fundamentalmente atacar la inestabilidad del mercado.

En general, las investigaciones tradicionales han intentado modelar el proceso de formación de los precios internacionales del grano mediante sistemas de ecuaciones lineales de comportamiento que describen las relaciones entre oferta y demanda. Adicionalmente, en otro tipo de estudios en los que se emplean modelos de análisis de series de tiempo se presenta el problema que el modelaje de las series se fundamenta en el supuesto implícito de la linealidad del sistema que genera la trayectoria de las variables. Esta hipótesis, conocida como paradigma de Frisch Slutsky, no está basada en ningún conocimiento a-priori de la linealidad del sistema económico (2).

Este trabajo busca, en primer lugar, encontrar evidencia de la presencia de no linealidades en la serie de tiempo del precio externo del café y segundo, determinar si es conveniente describir la dinámica de los precios mediante un modelo no lineal. Para cumplir con este objetivo, el artículo se ha dividido en cinco partes. En la primera, se exponen algunas características generales del comportamiento de los precios del grano a lo largo del presente siglo. En la segunda, se realiza el proceso de detección de no-linealidades en la serie de precios externos del café colombiano mediante el cálculo de un estadístico diseñado por Brock, Dechert y Scheinkman (1994). En la exposición del procedimiento de cálculo del estadístico, se plantea el comportamiento del precio externo del grano como descrito por un modelo econométrico lineal de intervención. El objetivo es comparar los alcances y limitaciones del modelo de intervención frente al modelo no lineal el cual se expone en la tercera sección, para escoger el que mejor describe el precio externo del café. Esto se realiza en la cuarta sección, en la cual se evalúan los modelos en términos del ajuste, la significancia de los parámetros y predicción. Por último, se extraen conclusiones de los resultados encontrados.

(1) Para una exposición más clara de los determinantes del precio internacional del café ver Junguito y Pizano (1993) El comercio exterior y la política internacional del café, Cap.4.
(2) Ver Pesaran y Potter (1993) en Nonlinear dynamics, chaos and econometrics:an introduction.

Anónimo, 2004

ACTIVIDADES

1. La siguiente tabla presenta información relacionada con la producción y el costo total de producción de un bien en el corto plazo.

Producción	**Costo total (nuevos soles)**
1	193
2	226
3	240
4	244
5	257
6	260
7	274
8	297
9	350
10	420

Para verificar si la información anterior comprueba que las curvas de costo marginal y costo medio tienen la forma de U típicas en el corto plazo, se puede usar el siguiente modelo:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + \beta_3 X_i^2 + \beta_4 X_i^3 + \mu_i$$

donde Y = costo total y X= producción.

(a) Estime el modelo.
(b) Estime la matriz var-cov para ß.
(c) Obtenga el R^2 y $\overline{R}^2$.
(d) A partir de la función de costo total dada anteriormente, obtenga expresiones para las funciones de costo medio y costo marginal.
(e) Ajuste las funciones de costo medio y costo marginal a las cifras, comentando el ajuste.

2. Dados los datos de la tabla ajústese el siguiente modelo a esa información y obténganse las estadísticas usuales de regresión:

$$\frac{100}{100 - Y_i} = \beta_1 + \beta_2 \left(\frac{1}{X_i} \right)$$

Y	86	79	76	69	65	62	52	51	51	48
X	3	7	12	17	25	35	45	55	70	120

3. De la siguiente tabla:

Industria	**V/L**	**W**
Harina de trigo	40.34	19.33
Azúcar	32.44	17.34
Pinturas y barnices	54.62	22.55
Cemento	38.90	20.84
Vidrio y manufacturas	25.33	17.68
Cerámica	28.27	19.58
Triplex	30.90	16.92
Textiles de algodón	27.54	20.26
textiles de yute	25.41	19.45
Textiles de lana	33.32	20.26
Químicos	48.54	22.00
Aluminio	41.72	21.94
Hierro y Acero	43.45	25.17
Bicicletas	38.87	22.25
Maquinas de coser	42.75	23.00

Estimar el siguiente modelo:

$$\mathrm{Log}\left(\frac{V}{L}\right) = \mathrm{Log}\beta_1 + \beta_2 \mathrm{Log}W + \mu$$

Donde:

$\left(\frac{V}{L}\right)$ = Valor agregado por unidad de trabajo

L = Insumo trabajo

W = Tasa de salario real

El coeficiente β_2 mide la elasticidad de sustitución entre trabajo y capital (es decir, el cambio proporcional en las proporciones de los factores, el cambio proporcional en los precios relativos de los factores). Verifique que la elasticidad estimada es 1.3338 y que esta no es estadísticamente diferente a 1.

4. Se obtuvieron datos sobre los gastos en alimentos y el gasto total (nuevos soles) de una muestra de 20 familias. Los datos se muestran a continuación:

Gasto en Alimentos	500	450	500	520	550	610	605	615	584	620
Gasto Total	650	655	665	645	675	710	710	715	718	760
Gasto en Alimentos	635	645	670	680	645	650	645	652	635	720
Gasto Total	795	801	821	834	835	850	865	845	880	875

a) Con los datos estime el siguiente modelo $Y_i = \beta_1 + \beta_2 \mathrm{Ln}(X_i)$.
b) Interprete los parámetros.
c) Realice una prueba de significancia para el parámetro β_2.
d) Halle el coeficiente de determinación R^2

AUTOEVALUACION

1. El siguiente análisis de regresión se realizo con la información de los depósitos por persona y el ingreso per cápita en el año 2002. El siguiente cuadro muestra la información:

Departamento	Deposito por Persona (Y)	Ingreso per capita (X)	$Y^* = Ln(Y)$	Y^*X	X^2
Amazonas	58.7	195.37	4.07	795.63	38169.44
Ancash	322.3	307.27	5.78	1774.63	94414.85
Apurímac	80.1	137.49	4.38	602.66	18903.50
Arequipa	949.4	331.33	6.86	2271.54	109779.57
Ayacucho	141.5	167.91	4.95	831.54	28193.77
Cajamarca	171	198.44	5.14	1020.31	39378.43
Cusco	355.1	259.75	5.87	1525.36	67470.06
Huancavelica	28	142.06	3.33	473.37	20181.04
Huánuco	119	191.82	4.78	916.73	36794.91
Ica	453.2	357.79	6.12	2188.36	128013.68
Junín	322.1	253.06	5.77	1461.39	64039.36
La Libertad	466.4	338.24	6.15	2078.50	114406.30
Lambayeque	383.8	343.2	5.95	2042.08	117786.24
Lima	4549.4	556.8	8.42	4689.79	310026.24
Loreto	232.8	265.28	5.45	1445.82	70373.48
Madre de Dios	200.2	327.47	5.30	1735.37	107236.60
Moquegua	1027	412.72	6.93	2861.96	170337.80
Pasco	239.5	233.75	5.48	1280.61	54639.06
Piura	270.2	209.18	5.60	1171.23	43756.27
Puno	178.8	179.72	5.19	932.08	32299.28
San Martín	131.3	220.57	4.88	1075.83	48651.12
Tacna	923.6	420.45	6.83	2870.95	176778.20
Tumbes	222.6	311.84	5.41	1685.61	97244.19
Ucayali	275.4	257.43	5.62	1446.30	66270.20
Nacional	1697.5	352.93	7.44	2624.71	124559.58
Totales	13798.9	6971.87	141.69	41802.37	2179703.20

El mejor modelo de regresión que se ajusta a los datos es el modelo de regresión exponencial: $Y = b_1 b_2^X$

$$Y^* = Ln(Y)$$

Linealizandolo $Y^* = b_1^* + b_2^* X$ donde: $b_1^* = Ln(b_1)$

$$b_2^* = Ln(b_2)$$

Con los siguientes datos halle el modelo no lineal.

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.37034456853 & -0.00118456228 \\ -0.00118456228 & 0.00000424765 \end{bmatrix} \quad X'Y = \begin{bmatrix} 141.69 \\ 41802.37 \end{bmatrix}$$

a. $\hat{Y} = 19.23(1.0097)^X$

b. $\hat{Y} = 40.67(8.0127)^X$

c. $\hat{Y} = 5.124(10.1245)^X$

d. $\hat{Y} = 5.124(1.1)^X$

2. Los siguientes datos relacionan las comisiones administrativas que un fondo mutualista líder en Perú paga a sus consultores de inversión por el manejo de sus bienes (valor neto del activo en miles de millones de soles).

COMISIÓN % (Y)	**BIENES (X)**	**COMISIÓN % (Y)**	**BIENES (X)**
0.52	0.5	0.41	30
0.51	5	0.40	35
0.48	10	0.39	40
0.46	15	0.39	45
0.44	20	0.38	55
0.42	25	0.37	60

Halle el modelo exponencial por el método matricial con los siguientes datos (Utilice 6 decimales):

$n = 12 \quad \sum X = 340.50 \quad \sum X^2 = 13750.25 \quad \sum Y^* = -10.13 \quad \sum XY^* = -310.76$

Donde $Y^* = Ln(Y)$

a. $\hat{Y} = 5.124e^{100.455X}$

b. $\hat{Y} = 0.505(0.99)^X$

c. $\hat{Y} = 0.457(2.456)^X$

d. $\hat{Y} = 0.457(2)^X$

3. Un ingeniero esta investigando el uso de un molino de viento para generar electricidad. El ha recolectado 25 datos sobre la producción de corriente de este molino y la correspondiente velocidad del viento. Estos datos se muestra en la siguiente tabla:

Producción (Y)	1.582	1.822	1.057	0.5	2.236	2.386	2.294	2.31	1.194
Velocidad Viento (X)	5	6	3.4	2.7	10	9.7	9.55	10.2	4.1
Producción (Y)	0.558	2.166	1.866	0.633	1.93	1.562	1.737	1.144	0.123
Velocidad Viento (X)	3.05	8.15	6.2	2.9	6.35	4.6	5.8	3.95	2.45
Producción (Y)	2.088	1.137	2.179	2.112	1.8	1.501	2.303		
Velocidad Viento (X)	7.4	3.6	7.85	8.8	7	5.45	9.1		

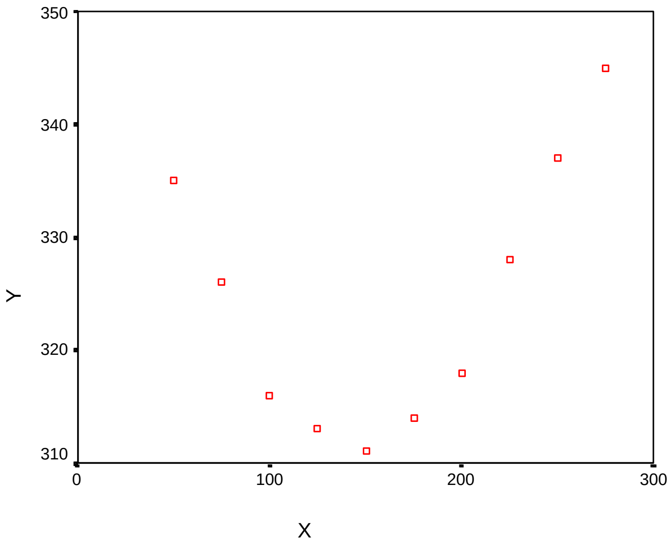
Halle el modelo cuadrático con los siguientes datos:

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 2.026896 & -0.692172 & 0.051608 \\ -0.692172 & 0.250720 & -0.019323 \\ 0.051608 & -0.019323 & 0.001529 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} \sum XY = 283.72 \\ \sum X^2Y = 2203.13 \\ \sum Y = 40.22 \end{array}$$

a. $\hat{Y} = -1.16 + 0.72X - 0.03X^2$

b. $\hat{Y} = 0.16 + 4.55X - 3.42X^2$
c. $\hat{Y} = -1.17 - 0.78X - 0.32X^2$

4. Analice el siguiente grafico y proponga un modelo.



a. Modelo Exponencial
b. Modelo Logístico
c. Modelo Cuadrático
d. Modelo Paramétrico

5. Dado el siguiente modelo no lineal: $\hat{Y} = \hat{\beta}_1 \hat{\beta}_2^X$ ¿Cual es el verdadero contraste para determinar la significancia del parámetro β_2?:

a. $\text{Hp}: \beta_2 = 0$
   $\text{Ha}: \beta_2 \neq 0$
b. $\text{Hp}: \text{Ln}(\beta_2) = 1$
   $\text{Ha}: \text{Ln}(\beta_2) \neq 1$
c. $\text{Hp}: \text{Ln}(\beta_2) = 0$
   $\text{Ha}: \text{Ln}(\beta_2) \neq 0$
d. $\text{Hp}: \text{Ln}(\beta_1) = 0$
   $\text{Ha}: \text{Ln}(\beta_1) \neq 0$

RESPUESTAS DE CONTROL

1.a, 2.b, 3.a, 4.c, 5.c